

УДК 681.513.5

Волянский Р. С., Садовой А. В.

## РАЗВИТИЕ ПРИНЦИПА СИММЕТРИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящее время в связи с необходимостью снижения себестоимости выпускаемой продукции при одновременном повышении ее качества остро встает проблема совершенствования существующих технологических процессов. Однако эта проблема не может быть решена без одновременного улучшения качественных и количественных характеристик соответствующих систем управления. Что, в свою очередь, создает предпосылки к поиску новых подходов к построению алгоритмов управления.

Анализ известных литературных источников показывает тенденцию ухода от классических методов построения высококачественных систем управления, базирующихся, например, на решении задач аналитического конструирования регуляторов [1] с применением квадратичных функций Ляпунова [2]. Намечается переход к использованию динамического программирования [3] для синтеза нелинейных оптимальных управлений на основе неквадратичной функции Ляпунова [4].

Целью данной работы является анализ процессов, происходящих в оптимальных системах, и выработка на его основе рекомендаций по трансформации управляющего воздействия для улучшения прямых показателей качества переходных процессов в замкнутой системе управления.

Рассмотрим обобщенный динамический объект 2-го порядка с одним нулевым корнем характеристического уравнения.

Возмущенное движение такого объекта описывается линейными дифференциальными уравнениями вида:

$$\begin{aligned} p\mathbf{h}_1 &= a_{12}\mathbf{h}_2; \\ p\mathbf{h}_2 &= a_{22}\mathbf{h}_2 + m_2U \end{aligned} \quad (1)$$

Оптимальное в смысле минимизации квадратичного функционала качества вида:

$$I = \int_0^{\infty} [(V_{12}\mathbf{h}_1 + V_{22}p\mathbf{h}_1)^2 + CU^2] dt. \quad (2)$$

Управление таким объектом будет:

$$U = -\text{sat} [g(V_{12}\mathbf{h}_1 + V_{22}p\mathbf{h}_1)]. \quad (3)$$

В функционале (2) и управляющем воздействии (3) коэффициенты  $V_{i2}$  являются коэффициентами функции Ляпунова:

$$V = V_{11}\mathbf{h}_1^2 + 2V_{12}\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 + V_{22}\mathbf{h}_2^2 \quad (4)$$

и определяются через коэффициенты характеристического уравнения [1]:

$$V_{22} = 1; V_{12} = -a_{22}; V_{11} = a_{22}^2. \quad (5)$$

Для простоты изложения будем считать, что параметры объекта управления и регулятора единичны, т. е.:

$$a_{12} = 1; \quad a_{22} = -1; \quad m_2 = 1. \quad (6)$$

Тогда с учетом (5) оптимальное управление (3) примет следующий вид:

$$U = -\text{sat}[(h_1 + ph_1)]. \tag{7}$$

Траектории возмущенного движения объекта (1) при отработке ступенчатого задающего сигнала в системе управления, реализующей алгоритм (7) при единичном коэффициенте усиления  $g$ , показаны на рис. 1.

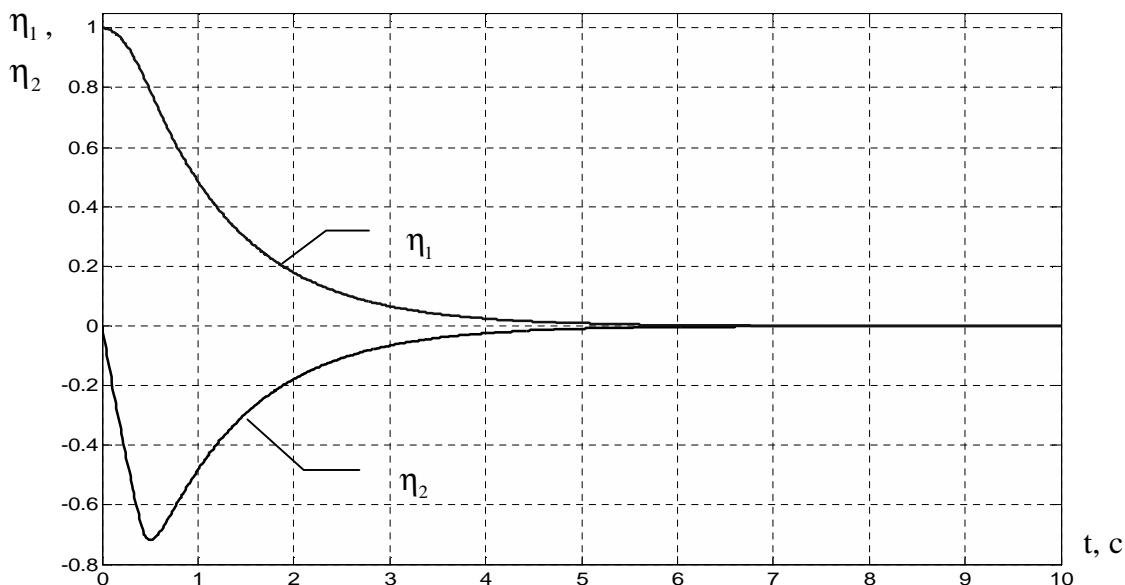


Рис. 1. Координаты возмущенного движения в линейной оптимальной системе управления

Как следует из анализа приведенных графиков, рассматриваемая система управления является асимптотически устойчивой. Причем асимптотическая устойчивость обеспечивается уменьшением управляющего воздействия одновременно со снижением ошибки управления и ее производной в соответствии с алгоритмом (7).

График изменения управляющего воздействия (7) показан на рис. 2 (кривая 1).

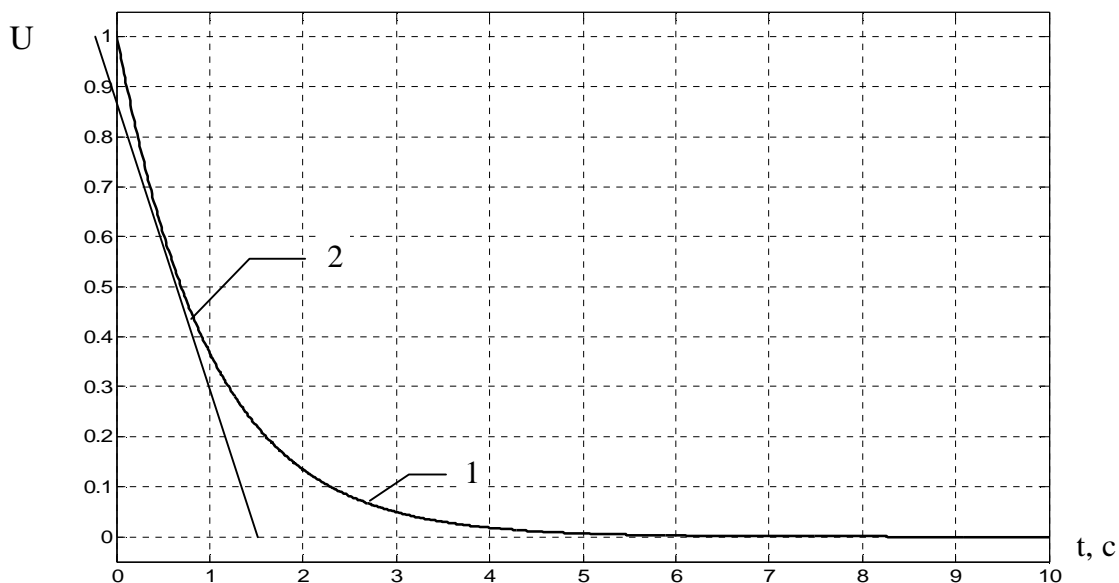


Рис. 2. Управляющее воздействие в линейной оптимальной системе управления

Как следует из приведенного графика, управляющее воздействие, которое формируется в соответствии с выражением (7), оказывает на систему управления значительное демпфирующее воздействие, затягивающее переходные процессы.

Будем считать, что на желаемых траекториях движения управляющее воздействие  $U$  должно изменяться не по экспоненциальному закону, показанному на рис. 2 кривой 1, а по линейному  $U$  – прямая 2 на рис. 2.

Такое управление можно получить на основании принципа симметрии, который в данном случае примет вид:

$$U^* = f(U), \quad (8)$$

где  $U$  – управление, изменяющееся по экспоненциальному закону;  $U^*$  – желаемое линейно-изменяющееся управление;  $f(\dots)$  – нелинейная функция, обратная закону изменения  $U$ .

Для определения управляющего воздействия  $U$  необходимо найти функцию  $f(\dots)$ , обеспечивающую линейное изменение сигнала управления на входе динамического объекта. Эту функцию будем искать в классе полиномиальных функций, путем рассмотрения зависимости  $U(t)$ .

В рассматриваемом временном интервале управляющее воздействие  $U(t)$  может быть аппроксимировано различными полиномиальными зависимостями  $\hat{U}(t)$ , причем, начиная с полиномов 5 порядка и выше, ошибка аппроксимации не превышает 1 %.

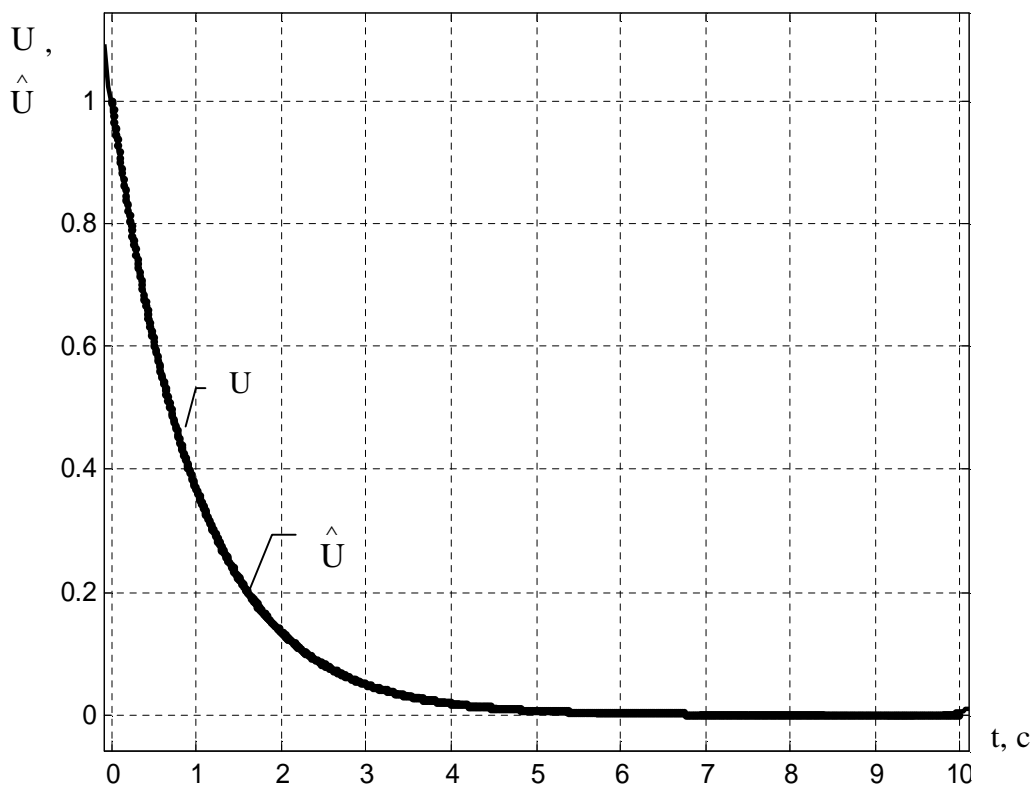


Рис. 3. Аппроксимация управления  $U(t)$  полиномом  $\hat{U}(t)$  5-го порядка

Однако наибольший интерес представляет аппроксимация  $\hat{U}(t)$  управляющего воздействия  $U(t)$  на рассматриваемом интервале времени, ограниченном  $t = 2$  с.

На этом интервале с точностью до 2 % исследуемая зависимость может быть аппроксимирована полиномом 2-го порядка.

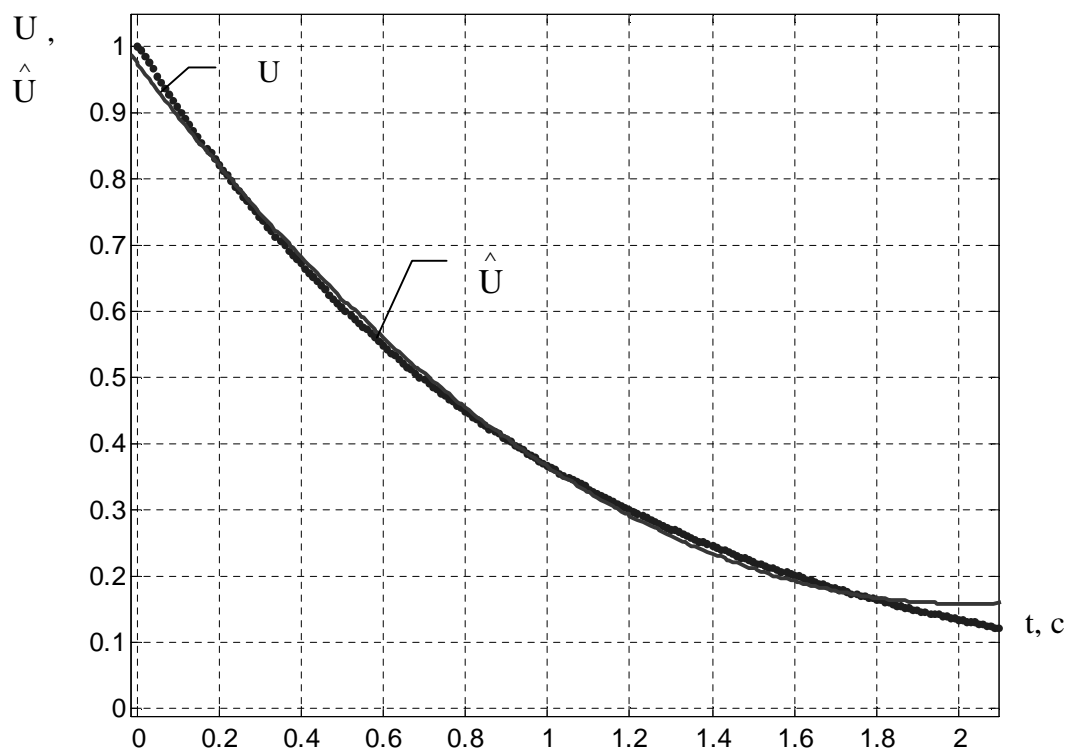


Рис. 4. Аппроксимация управления  $U(t)$  полиномом  $\hat{U}(t)$  2-го порядка

Приведенные выше рассуждения позволяют сделать вывод о том, что если управляющее воздействие  $U(t)$  с известной степенью точности изменяется по параболическому закону, то для формирования линейно-изменяющегося управляющего воздействия  $U(t)$  функция  $f(\dots)$  должна изменяться по закону квадратного корня. Т. е. в системе управления динамическим объектом (1) алгоритм управления должен иметь следующий вид:

$$U = -\text{sqrt}\left[ g (V_{12}h_1 + V_{22}ph_1) \right], \tag{9}$$

где  $\text{sqrt}(\dots)$  – кусочно-непрерывная функция, которая определена следующим образом:

$$\text{sqrt}(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \text{sign}(x) & \text{при } |x| < 1, \\ \text{sign}(x) & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \tag{10}$$

Реализация регулятора с алгоритмом управления (9) для объекта (1) обеспечивает в системе управления траектории возмущенного движения, показанные на рис. 5.

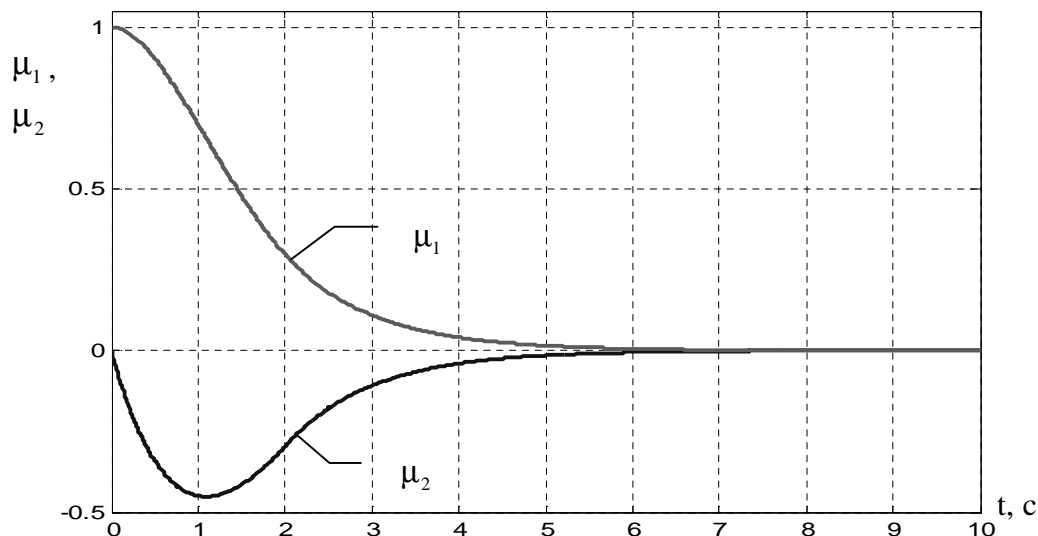


Рис. 5. Координаты возмущенного движения в нелинейной оптимальной системе управления

Координаты возмущенного движения  $\mu_i$  являются аналогами отклонений  $\eta_i$  и соответствуют управляющему воздействию  $U^*$ .

Управляющее воздействие  $U^*$  при этом будет иметь вид, показанный на рис.6.

Отличительной особенностью системы управления с регулятором (9) является увеличение коэффициента усиления регулятора при снижении координат возмущенного движения. Поэтому при малых отклонениях вследствие значительного увеличения этого коэффициента возникает режим, аналогичный скользящему, но с меньшей амплитудой. Очевидно, что возникновение скользящего режима придает замкнутой системе уникальные свойства и характеристики, однако в рассматриваемой системе управления это явление нуждается в дополнительном исследовании, выходящем за рамки настоящей работы.

Можно сказать, что управляющее воздействие  $U^*$  является результатом «сшивания» двух функций: непрерывной, соответствующей большим значениям координат возмущенного движения и разрывной, которая характерна для квазиустановившегося режима. Переход от одной «сшиваемой» функции к другой осуществляется автоматически и безударно в соответствии с выражением (10).

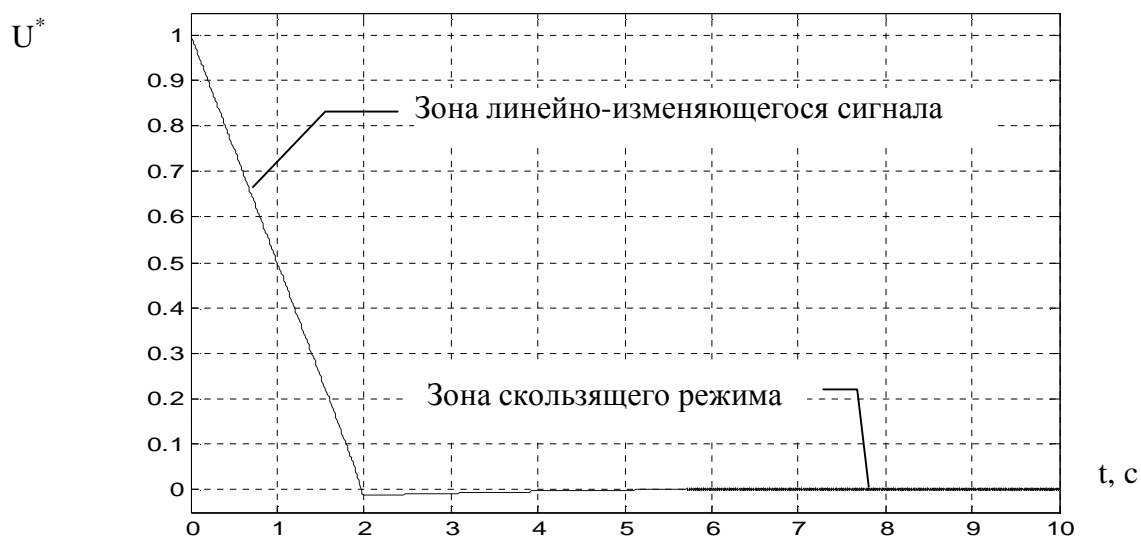


Рис. 6. Управляющее воздействие в нелинейной оптимальной системе управления

На рис. 7 совмещены траектории возмущенного движения в системах с управляющими воздействиями (7) и (9).

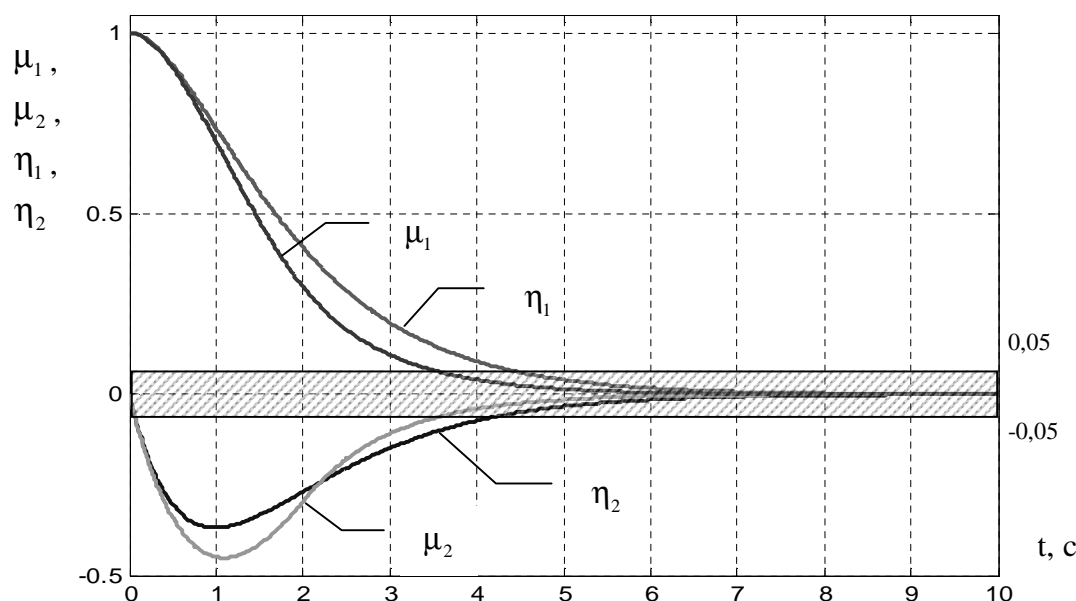


Рис. 7. Координаты возмущенного движения в линейной  $\eta_i$  и нелинейной  $\mu_i$  системах управления

Анализ полученных зависимостей свидетельствует о повышении быстродействия синтезированной нелинейной системы управления. Для рассматриваемого объекта (1) с единичными постоянными времени управляющее воздействие (9) обеспечивает вхождение отклонения регулируемой переменной в 5 % коридор отклонений на 1 с раньше, чем управляющее воздействие (7).

Кроме того, интересным является участок движения на отрезке времени от 2 с до 4 с. Как следует из сопоставления рис. 6 и 7, величина управляющего воздействия  $U^*(t)$  на этом участке практически равна нулю, следовательно, вся предыдущая траектория  $\langle \mu_1(t), \mu_2(t) \rangle$  сформирована таким образом, что последующее свободное движение объекта является оптимальным. Указанный факт создает предпосылки к улучшению энергетических характеристик замкнутой системы управления и требует дополнительного рассмотрения свойств систем, реализующих алгоритмы вида (9), не только с позиций быстродействия и точности, но и с энергетической точки зрения.

## ВЫВОДЫ

Как следует из приведенных выкладок, использование динамического программирования совместно с принципом симметрии систем автоматического управления путем использования нелинейных звеньев позволяет определять управляющие воздействия, повышающие точность и быстродействие замкнутых систем управления за счет ослабления демпфирующих воздействий регулятора. Однако их использованию должны предшествовать работы, посвященные анализу устойчивости, точности и энергетики таких систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Садовой А. В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами / А. В. Садовой, Б. В. Сухинин, Ю. В. Сохина. – К. : ИСИМО, 1996. – 298 с.
2. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин. – М., Наука, 1970. – 240 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – ИЛ, 1960. – 400 с.
4. Колесников А. А. Синергетика и проблемы теории управления / А. А. Колесников // Сборник статей ФМЛ. – 2004. – 503 с.